Положим

$$Bv(x) = V(x) + \lambda_1 \int_a^b K(x, t) v(t) dt,$$

где $K(x, t)$ есть обобщенная резольвента ядра $M(x, t)$.

Тогда интегральное уравнение (19) имеет решение

$$u(x) = Bw(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k Bw_k(x) + \sum_{k=1}^{\nu} B_k u_k(x), \tag{33}$$

где B_k — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь функцию

$$y(x) = h(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k h_k(x) + \sum_{k=0}^{\nu} B_k v_k(x), \tag{34}$$

где

$$v_k(x) = \lambda_1 \int_{x_0}^{x} \overline{H}(x, \eta) u_k(\eta) d\eta; \tag{35}$$

$$h(x) = g(x) + \lambda_1 \int_{x_0}^{x} \overline{H}(x, \eta) Bw(\eta) d\eta;$$

и

$$h_k(x) = \varphi_k(x) + \lambda' \int_{x_0}^{x} \overline{H}(x, \eta) Bw_k(\eta) d\eta. \tag{36}$$

Формулы (35) и (36) имеют следующие обращения:

$$\left.\begin{aligned} Bw\ (x) &\equiv \Phi\,[h(x)]; \\ Bw_k(x) &\equiv \Phi\,[\psi_k(x)]; \\ u_k(x) &\equiv \Phi\,[v_k x)]. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Принимая во внимание формулы (36) и (37), легко проверить, что функция (34) является решением уравнения (17). Подчиняя параметры A_k условиям (16), получим следующую систему:

$$A_i - \lambda_1 \sum_{k=0}^{p-1} \beta_{ik} A_k = \lambda_1 \beta_i + \lambda_1 \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_{ik} B_k, \tag{38}$$

где β_{ik}, β_i, γ_{ik} — определенные числа, выражения которых мы не будем выписывать. Кроме условий (38), постоянные $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ должны еще удовлетворять следующей системе:

$$a_{0i} A_0 + \ldots + a_{p-1,\,i}\, A_{p-1} = 0, \ (i = 1, 2, \ldots v), \tag{39}$$

которая получается из условий разрешимости интегрального уравнения (19) для значения $\lambda = \lambda_1$.

Таким образом, чтобы при $\lambda = \lambda_1$ интегро-дифференциальное уравнение (1) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы системы уравнений (38) и (39) были совместно разрешимы относительно $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$.

Укажем один достаточный признак совместности этих систем. Правые части уравнений (38) содержат ν произвольных параметров B_k.